


МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)

Институт физико-математического образования, информационных и
обслуживающих технологий
Кафедра фундаментальной математики

УТВЕРЖДАЮ

Врио директора Института физико-
математического образования,
информационных и обслуживающих
технологий

 Е.А. Журавлева
«25» февраля 2026 г.

Приложение к рабочей программе учебной дисциплины

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации
обучающихся по дисциплине
Теория случайных процессов

Направление подготовки 01.03.01 Математика
Профиль подготовки Математические и цифровые технологии в образовании
Квалификация выпускника – бакалавр
Форма обучения – очная
Курс – 3

Разработчик:
доцент Давыскиба О.В.
Заведующий кафедрой фундаментальной
математики

 Темникова С.В.

Протокол
от «17» марта 2025 г. № 6

Луганск, 2026

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

1.1. Область применения

Фонд оценочных средств (ФОС) – неотъемлемая часть рабочей программы дисциплины «Теория случайных процессов» и предназначен для контроля и оценки образовательных достижений студентов, освоивших программу дисциплины.

1.2. Цели и задачи фонда оценочных средств

Цель ФОС — установить соответствие уровня подготовки обучающегося требованиям ФГОС ВО бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10.01.2018 № 8 (с изменениями и дополнениями).

1.3. Перечень компетенций, формируемых в процессе освоения основной образовательной программы

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций и индикаторов их достижения:

Код по ФГОС ВО	Индикатор достижения
Общепрофессиональная	
ПК-4 Способен разрабатывать и применять современные технологии на основе фундаментальных математических теорий, концепций и методов.	ПК-4.1. Понимает значение фундаментальных математических теорий, концепций и методов для решения прикладных задач, способен использовать их при разработке современных цифровых технологий.

1.4. Этапы формирования компетенций и средства оценивания уровня их сформированности

Этапы формирования компетенций	Компетенции	Контрольно-оценочные средства / способ оценивания
Тема 1. Основание теории случайных процессов.	ПК-4	Устный опрос. Выполнение практических заданий.
Тема 2. Случайные последовательности.	ПК-4	Устный опрос. Выполнение практических заданий.
Тема 3. Элементы общей теории случайных процессов.	ПК-4	Устный опрос. Выполнение практических заданий.
Тема 4. Марковские процессы в широком смысле.	ПК-4	Устный опрос. Выполнение практических заданий.
Тема 5. Точечные случайные процессы. Теория восстановления. Теория очередей.	ПК-4	Устный опрос. Выполнение практических заданий.
Тема 6. Стохастические уравнения и их	ПК-4	Устный опрос. Выполнение

свойства.		практических заданий.
Промежуточная аттестация	ПК-4	Экзамен (письменный)

1.5. Описание показателей формирования компетенций

Код компетенции	Результаты сформированности
Общепрофессиональная	
ПК-4 Способен разрабатывать и применять современные технологии на основе фундаментальных математических теорий, концепций и методов.	<p>Знает: основные понятия, определения, теоремы теории случайных процессов; современный математический аппарат, используемый при моделировании систем и процессов в условиях стохастического описания параметров.</p> <p>Умеет: решать типовые задачи по основным разделам дисциплины; интерпретировать результаты, полученные методами теории случайных процессов.</p> <p>Владеет: применения современного математического аппарата в исследовательской и прикладной деятельности для описания процессов и явлений в условиях стохастической исходной информации.</p>

1.6. Критерии оценивания компетенций на разных этапах их формирования

Вид учебной работы	Количество баллов
	ОФО
Выполнение домашнего задания	14
Работа на практических занятиях	36
Экзамен (письменный)	50
Всего:	100

Накопительная система оценивания по 100-балльной шкале

Четырехбалльная система оценивания экзамена	100-балльная шкала	Буквенная шкала, соответствующая 100-балльной шкале	Система оценивания зачета
Отлично	90–100	А – отлично – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному	
Хорошо	83–89	В – очень хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном	

		сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения большинства из них оценено числом баллов, близким к максимальному	Зачтено
Хорошо	75–82	С – хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью; некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения ни одного из них не оценено минимальным числом баллов, некоторые виды заданий выполнены с ошибками	
Удовлетворительно	63–74	D – удовлетворительно – теоретическое содержание дисциплины освоено частично, но пробелы не носят существенного характера; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий, содержат ошибки	
Удовлетворительно	50–62	E – посредственно – теоретическое содержание курса освоено частично; некоторые практические навыки работы не сформированы, многие предусмотренные программой обучения учебные задания не выполнены либо качество выполнения некоторых из них оценено числом баллов, близким к минимальному	
Неудовлетворительно	21–49	FX – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса освоено частично; необходимые практические навыки работы не сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнено либо качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному; при дополнительной самостоятельной работе над материалом курса возможно повышение качества выполнения учебных заданий	Не зачтено
Неудовлетворительно	0–20	F – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса не освоено; необходимые практические навыки работы не сформированы; все выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к какому-либо значимому повышению качества выполнения учебных заданий	

2. КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

2.1. Оценочные средства текущего контроля

Вопросы для устного опроса:

1. Сформулируйте определение случайного процесса.
2. Что называется сечением случайного процесса в момент времени t ?
3. Что называется реализацией случайного процесса?
4. Сформулируйте определение одномерной функции распределения случайного процесса.
5. Сформулируйте определение двумерной функции распределения случайного процесса.
6. Сформулируйте определение n -мерной функции распределения случайного процесса.
7. Сформулируйте условия согласованности.
8. Сформулируйте определение плотности распределения случайного процесса.
9. Сформулируйте определение математического ожидания случайного процесса.
10. Сформулируйте основные свойства математического ожидания случайного процесса.
11. Сформулируйте определение дисперсии случайного процесса.
12. Сформулируйте основные свойства дисперсии случайного процесса.
13. Что называется стандартным отклонением случайного процесса?
14. Сформулируйте определение центрированного случайного процесса.
15. Сформулируйте основные свойства центрированного случайного процесса.
16. Сформулируйте определение функции корреляции случайного процесса.
17. Сформулируйте определение ковариационной функции случайного процесса.
18. Сформулируйте определение взаимной функции ковариации двух случайных процессов.
19. Какие случайные процессы называются коррелированными, а какие некоррелированными?
20. Сформулируйте основные свойства функции корреляции.
21. Сформулируйте основные свойства ковариации.
22. Какой случайный процесс называется стационарным в широком смысле?
23. Сформулируйте свойства ковариационной функции стационарного случайного процесса.
24. Сформулируйте определение нормированной ковариационной функции.
25. Сформулируйте свойства нормированной ковариационной функции стационарного случайного процесса.
26. Какие две случайные функции называются стационарно связанными?

27. Сформулируйте определение усреднённой по времени функции корреляции для стационарного процесса.
28. Сформулируйте определение эргодического случайного процесса.
29. Сформулируйте необходимые и достаточные условия эргодичности случайного процесса.
30. Что называют спектральной плотностью случайного процесса?
31. Сформулируйте свойства спектральной плотности случайного процесса.
32. Сформулируйте определение случайного процесса непрерывного в точке.
33. Сформулируйте определение производной случайного процесса.
34. Сформулируйте необходимое и достаточное условия дифференцируемости случайного процесса.
35. Сформулируйте определение среднеквадратического интеграла случайной величины.
36. Сформулируйте определение гауссовского случайного процесса.
37. Сформулируйте определение процесса с независимыми приращениями.
38. Сформулируйте определение винеровского процесса.
39. Сформулируйте определение потока событий.
40. Какой поток событий называется стационарным?
41. Какой поток событий называется ординарным?
42. Какой поток событий называется потоком без последствий?
43. Какой поток событий называется простейшим?
44. Что называется интенсивностью потока событий?
45. Сформулируйте определение потока Пальма.
46. Сформулируйте определение потока Эрланга.
47. Сформулируйте определение марковского случайного процесса.
48. Сформулируйте определение марковской цепи.
49. Что называются вероятностями состояний цепи Маркова?
50. Что называется вероятностью перехода?
51. Какая марковская цепь называется однородной?
52. Сформулируйте определение потока вероятности перехода.
53. Какой марковский процесс называется стохастично непрерывным?
54. Какой марковский процесс называется локально регулярным?

Практические задания:

1. Случайный процесс $\xi(t)$ принимает два значения $+1$ и -1 . Число перемен знаков за время τ подчиняется распределению Пуассона с параметром μ . В начальный момент времени оба значения равновероятны. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции этого процесса и определить является ли этот процесс стационарным.

2. Случайный процесс $\xi(t)$ состоит из горизонтальных отрезков единичной длины, ординаты которых независимые случайные величины с плотностью

$$p(x) = \frac{|x|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-|x|}. \text{ Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию}$$

корреляции процесса $\xi(t)$. Определить, является ли данный процесс стационарным, по крайней мере, в широком смысле.

3. U и V независимые случайные величины, равномерно распределенные в интервале $[a, b]$ и $[c, d]$ соответственно. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $S(t) = U + Vt$. Является ли этот процесс стационарным?

4. Случайный процесс задан в виде $\xi(t) = U \cos at + V \sin at$, где a – неслучайная величина, U и V – некоррелированные случайные величины, равномерно распределенные в интервале $[-1, 1]$ и $[-2, 2]$ соответственно. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции данного процесса. Является ли данный процесс стационарным?

5. Найти функцию ковариации процесса в виде $\eta(t) = \xi(t) \cos(Bt + \phi)$, где B – неслучайная величина, $\xi(t)$ – стационарный случайный процесс с математическим ожиданием m и функцией ковариации $K(\tau)$, ϕ – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 2\pi]$, $\xi(t)$ и ϕ независимые. Является ли этот процесс стационарным?

6. Найти функцию взаимной ковариации процесса и его второй производной, если процесс $\xi(t)$ имеет математическое ожидание равное αt и функцию ковариации $K_\xi(t, s) = e^{-(t+s)}$.

7. Пусть $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ – независимые случайные процессы с корреляционными функциями $R_1(t, s)$ и $R_2(t, s)$, соответственно. Найти корреляционную функцию процесса $\xi(t) = \eta_1(t)\eta_2(t)$.

8. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции случайного процесса $\eta(t) = X \cos(t + Y)$, где X имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, Y – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 2\pi]$.

9. Пусть η – нормальная случайная величина с функцией распределения $\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$. Найти двумерное распределение случайного процесса $\xi(t) = \eta + t$, где $t \in R$.

10. U и V – независимые случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону с параметрами λ_1 и λ_2 , соответственно. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $S(t) = U + Vt$. Является ли этот процесс стационарным?

11. Случайный процесс $S(t) = Ue^{-\alpha t} + Ve^{-\beta t}$, где U и V – некоррелированные случайные величины с нулевым математическим ожиданием, α и β – неслучайные величины. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $\xi(t)$. Определить, является ли данный процесс стационарным, по крайней мере, в широком смысле.

12. Случайный процесс $S(t) = t + Ue^{-\alpha t} + Ve^{-\beta t}$, где U и V – некоррелированные случайные величины с нулевым математическим ожиданием.

и дисперсиями $D_1 = D_2 = 2$, α и β неслучайные величины. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $\xi(t)$. Определить, является ли данный процесс стационарным, в широком смысле.

13. Случайная величина ξ распределена равномерно в интервале $[0, 2\pi]$. Для случайного процесса $\eta(t) = \xi t + a$, где a – неслучайная величина, найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции. Является ли этот процесс стационарным?

14. Случайный процесс задан в виде $\xi(t) = Vt^2$, где V – непрерывная случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами a и σ^2 . Найти вероятностные характеристики процесса $\xi(t)$ (математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции). Проверить является ли этот процесс стационарным в широком смысле?

15. Доказать строгую стационарность процесса $\xi(t) = \alpha \cos(\beta t + \varphi)$, где α, β – неслучайные величины, φ – случайная величина равномерно распределенная на отрезке $[0, 2\pi]$.

16. Случайный процесс представляет собой $\xi(t) = V$, где V – непрерывная случайная величина с плотностью $p_V(x)$. Найти вероятностные характеристики процесса $\xi(t)$ (математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции). Является ли этот процесс стационарным?

17. Поток покупателей является простейшим Пуассоновским с параметром λ , это значит, что вероятность того, что за время τ появится ровно k покупателей определяется формулой Пуассона:

$$P_k(\tau) = \frac{(\lambda \tau)^k}{k!} e^{-\lambda \tau}$$

Процесс $\xi(t)$ представляет собой число покупателей пришедших от 0 до t (например, совпадает с началом рабочего дня). Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $\xi(t)$. **Указание.** При вычислении функции корреляции воспользоваться тем, что при $s > t$ $\xi(s) = \xi(t) + \Delta\xi$, где $\Delta\xi$ – число событий наступивших за время от t до s .

18. Пусть ξ – случайная величина, имеющая нормальное распределение с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 . Найти функцию корреляции случайного процесса $\eta(t) = \xi^2 t + b$, где b – вещественное число, $t > 0$.

19. Имеется пуассоновский поток случайных событий с интенсивностью λ . Случайный процесс $\xi(t)$ образуется следующим образом: в момент времени i -го события ($i=1, 2, \dots$) процесс принимает случайное значение V_i и сохраняет его до появления следующего события в потоке. В начальный момент времени $\xi(0) = V_0$. Случайные величины V_0, V_1, \dots – независимы и одинаково распределены с плотностью $p_V(x)$. Найти основные характеристики процесса.

20. Найти корреляционную функцию случайного процесса

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n Y_i q_i(t), \quad \text{где } q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t) - \text{неспользуемые функции, } Y_1, Y_2, \dots, Y_n -$$

некоррелированные случайные величины математическими ожиданиями m_1, m_2, \dots, m_n и дисперсиями d_1, d_2, \dots, d_n соответственно.

21. Пусть $R(t, s)$ – корреляционная функция некоторого случайного процесса, $Q(z)$ – полином с положительными коэффициентами. Доказать, что функция $R(t, s) = Q(R(t, s))$ является корреляционной функцией некоторого случайного процесса.

22. Пусть $X \sim N(m, \sigma)$, b – вещественное число. Найти функцию корреляции СП случайного процесса $Y(t) = Xt + b, t > 0$.

23. Случайный процесс $X(t)$ имеет вид $X(t) = U + Vt$, где U и V – независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0, 1], t \geq 0$. Вычислить вероятность $P(A)$ случайного события

$$A = \left\{ 0 < X(1) < \frac{1}{2} \right\} \cap \left\{ \frac{1}{2} < X(2) < \frac{3}{4} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2} < X(1) < 1 \right\} \cap \left\{ \frac{1}{4} < X(2) < \frac{3}{4} \right\}.$$

24. Пусть X и Y – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения -1 и $+1$ с вероятностями $1/2$. Исследовать на стационарность случайный процесс $\xi(t) = X \cos \lambda t + Y \sin \lambda t, t \geq 0$.

25. Пусть $X(t), t \geq 0$ – пуассоновский случайный процесс с параметром λ . Доказать, что случайный процесс $Y(t) = X(t+1) - X(t), t \geq 1$ является стационарным в широком смысле.

26. Является ли стационарной последовательность попарно независимых одинаково распределенных случайных величин?

27. Пусть $\varphi(t)$ – непрерывная периодическая функция с периодом T, X – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, T]$. Исследовать случайный процесс $Y(t) = \varphi(t + X)$ на стационарность.

28. Доказать, что сумма независимых стационарных случайных процессов является стационарным случайным процессом.

29. Найти функцию ковариации процесса $\xi(t) = X \cos(t + Y)$, где X, Y независимы, X имеет нормальное распределение $N(0; 1)$, а Y имеет равномерное распределение на $[-\pi; \pi]$.

30. Пусть $X(t)$ – стационарный случайный процесс, Y – случайная величина. Является ли случайный процесс $Z(t) = X(t) + Y$ стационарным?

31. Показать, что функция $R(t) = \sigma^2 e^{-a|t|} \cos \beta t$, где a, β, σ – некоторые положительные постоянные, может быть функцией корреляции непрерывного в среднем квадратическом и стационарного в широком смысле случайного процесса. Определить спектральную плотность, соответствующую такой функции корреляции.

32. Случайный процесс $X(t)$ имеет вид $X(t) = b \sin(\omega t + \varphi)$, где b, ω – известные числа, φ – случайная величина с плотностью распределения вероятностей $f(x), t \geq 0$. Исследовать случайный процесс $X(t)$ на стационарность и на эргодичность в следующих случаях:

а) $f(x) = \cos x$ при $x \in [0, \pi/2]$;

б) $f(x) = 1/2\pi$ при $x \in [0, 2\pi]$, $f(x) = 0$ при $x \notin [0, 2\pi]$.

33. Случайный процесс $\xi(t)$ задан четырьмя равновероятными реализациями:

$$\xi_{\omega_1}(t) = 1; \xi_{\omega_2}(t) = -2; \xi_{\omega_3}(t) = \sin \pi t; \xi_{\omega_4}(t) = \cos \pi t.$$

Найти вероятностные характеристики процесса $\xi(t)$ (математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции). Является ли этот процесс стационарным, по крайней мере в широком смысле?

34. Интервал времени T между событиями в ординарном потоке имеет плотность:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-t_0)} & \text{при } t > t_0, \\ 0 & \text{при } t < t_0. \end{cases}$$

Интервалы между событиями независимы. 1) Построить график плотности $f(t)$. 2) Является ли данный поток простейшим? 3) Является ли он потоком Пальма? 4) Какова его интенсивность $\tilde{\lambda}$? 5) Каков коэффициент вариации v_t интервала между событиями?

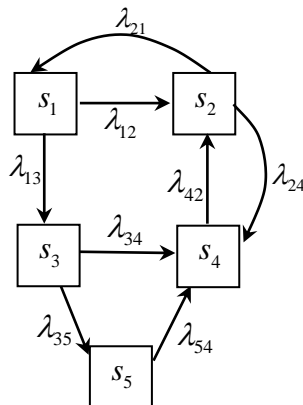
35. В моменты времени t_1, t_2, t_3 производится осмотр ЭВМ. Возможные состояния ЭВМ: s_0 – полностью исправна; s_1 – незначительные неисправности, которые позволяют эксплуатировать ЭВМ; s_2 – существенные неисправности, дающие возможность решать ограниченное число задач; s_3 – ЭВМ полностью вышла из строя.

Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Построить граф состояний. Найти вероятности состояний ЭВМ после одного, двух, трех осмотров, если в начале (при $t=0$) ЭВМ была полностью исправна.

36. Для системы S , размеченный граф состояний которой дан на рисунке, найти уравнения для финальных вероятностей состояний.



37. Рассматривается работа ЭВМ. Среднее время безотказной работы ЭВМ равно $\frac{1}{\lambda}$; (простейший поток отказов с параметром μ). Если в ЭВМ происходит сбой, то она останавливается и ремонтируется. Среднее время ремонта равно $\frac{1}{\lambda}$, а поток восстановления простейший с параметром λ ; Определить вероятность того, что ЭВМ будет работать в момент t , если в момент $t=0$ она работала.

2.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Теоретические вопросы для проведения экзамена

1. Определение и описание случайных процессов.
2. Законы распределения случайных процессов.
3. Основные характеристики случайных процессов. Математическое ожидание, дисперсия случайного процесса и их свойства.
4. Стационарные случайные процессы.
5. Эргодические случайные процессы.
6. Спектральная плотность. Свойства спектральной плотности
7. Сходимость случайных процессов.
8. Непрерывность случайных процессов.
9. Дифференцируемость случайного процесса.
10. Интегрируемость случайного процесса.
11. Гауссовские случайные процессы.
12. Процессы с независимыми приращениями.
13. Винеровский процесс (частный случай процесса с независимыми приращениями).
14. Пуассоновский процесс (частный случай процесса с независимыми приращениями).
15. Потоки событий. Стационарный и ординарный поток.
16. Простейший поток. Интенсивность потока.
17. Потоки Пальма и Эрланга.
18. Марковский случайный процесс. Цепь Маркова.
19. Переходные вероятности.
20. Непрерывная марковская цепь.
21. Вероятности состояний.
22. Финальные вероятности.
23. Схема гибели и размножения.
24. Использование теории Марковских процессов для систем массового обслуживания (СМО).